Stefan GÖTZ, Franz HOFBAUER, Wien

Geraden, Kreise und Dreiecke: Vorschläge zur Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft

Einleitung

Häufig fehlen in der analytischen Geometrie der Sekundarstufe II geeignete herausfordernde und interessante Probleme. In diesem Beitrag wird durch die Verbindung von analytischer Geometrie mit elementargeometrischen Problemen ein Vorschlag dazu gemacht, der darüber hinaus eine innermathematische Vernetzung mit sich bringt. Der österreichische Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe weist sogar mit dem Unterpunkt „Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie“ (bm:ukk 2004, S. 4) direkt auf diese Möglichkeit hin.

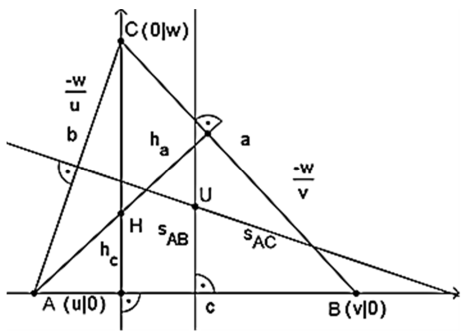
Es werden motivierende Fragestellungen den einzelnen Resultaten vorangestellt, die dann mittels dynamischer Geometriesoftware (DGS) erkundet werden. Die im Beitrag verwendeten Beispiele ermöglichen es den Schülerinnen und Schülern Hypothesen aufzustellen und zu begründen. In Holland (1988, S. 51) finden wir zum Beweisen im Geometrieunterricht, dass geometrische Sätze „einsichtig und beziehungsreich gelernt werden“ müssen. Das bedeutet, „daß

- die Allgemeingültigkeit des zu lernenden Satzes eingesehen wird;
- Beziehungen zu solchen Sätzen hergestellt werden, welche die Allgemeingültigkeit des Satzes begründen.“ (ebd.).

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie durch die geschickte Wahl der (allgemeinen) Lage eines ebenen Dreiecks in einem Koordinatensystem eine sehr leistungsfähige algebraische Beschreibung gelingt.

Die Ausgangssituation und ein erstes Ergebnis

Ein beliebiges Dreieck *ABC* können wir so in ein Koordinatensystem legen, dass der Eckpunkt *A* die Koordinaten $(u|0)$, der Eckpunkt *B* die Koordinaten $(v|0)$ und der Eckpunkt *C* die Koordinaten $(0|w)$ hat. Die Eckpunkte *A* und *B* liegen auf der *x*-Achse und der Eckpunkt *C* liegt auf der *y*-Achse. Damit *A* links von *B* liegt, nehmen wir immer $u<v$ an. Außerdem können wir $w>0$ annehmen.



Wir setzen $a=\sqrt{v^2+w^2}$, $b=\sqrt{u^2+w^2}$ und $c=v-u$, das sind die Längen der drei Seiten des Dreiecks.

Wo liegen in einem solchen Dreieck Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt? Die Gleichung der Trägergeraden der Höhe h_a durch den Eckpunkt *A* ist $-(x-u)v+yw=0$. Dazu finden wir die Steigung der Trägergeraden der Seite *a* als $-\frac{w}{v}$, was einen Normalvektor $\begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$ auf h_a impliziert. Die Höhe durch den Eckpunkt *C* liegt auf der *y*-Achse, die zugehörige Trägergerade hat daher die Gleichung *x*=0. Der Schnittpunkt ist $(0|-\frac{uv}{w})$, womit der Höhenschnittpunkt *H* gefunden ist.

Die Mittelsenkrechte s_{AB} der Seite *AB* hat die Gleichung $x=\frac{u+v}{2}$. Die Mittelsenkrechte s_{AC} der Seite *AC* hat einen Normalvektor $\begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix}$ wegen der Steigung $-\frac{w}{u}$ der Trägergeraden von *b*. Die Gleichung der zugehörigen Trägergeraden ist dann $-\left(x-\frac{u}{2}\right)u+\left(y-\frac{w}{2}\right)w=0$. Der Schnittpunkt von s_{AB} und s_{AC} ist $(\frac{u+v}{2}|\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w})$, der Umkreismittelpunkt *U*.

Der quadrierte Abstand von *U* zum Eckpunkt *C* ist $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{2}-\frac{uv}{2w}\right)^2=\frac{u^2w^2+v^2w^2+w^4+u^2v^2}{4w^2}=\frac{a^2b^2}{4w^2}$. [Ein Computeralgebrasystem (CAS) liefert zumindest $\frac{(u^2+w^2)\cdot(v^2+w^2)}{4\cdot w^2}$.] Die Wurzel daraus ist der Umkreisradius *r*.

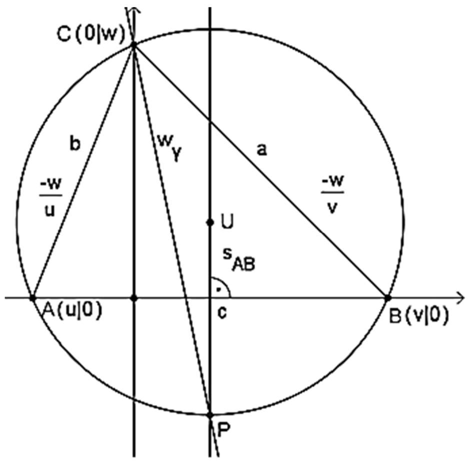
Der gespiegelte Höhenschnittpunkt

Spiegle den Höhenschnittpunkt von verschiedenen Dreiecken an den (Trägergeraden der) Seiten! Was fällt Dir auf? Wo liegen diese Punkte, egal, ob das Dreieck spitz- oder stumpfwinkelig ist? Was passiert, wenn das Dreieck rechtwinkelig ist? – Wir erkennen: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den Seiten des Dreiecks, dann liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis.

Es genügt, dies für die Seite des Dreiecks zu begründen, die auf der *x*-Achse liegt. Wir können das ja für jede der drei Dreiecksseiten erreichen, indem wir das Dreieck in geeigneter Weise ins Koordinatensystem legen. Spiegelt man den Höhenschnittpunkt *H* um die Seite *AB*, dann erhält man $(0|\frac{uv}{w})$. Der quadrierte Abstand dieses Punktes zum Umkreismittelpunkt *U* ist $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{2}-\frac{uv}{2w}\right)^2$. Die Wurzel daraus ist der Umkreisradius *r*, wie bereits in der obigen Rechnung gezeigt worden ist. Somit liegt der gespiegelte Höhenschnittpunkt auf dem Umkreis.

Der Schnittpunkt von Mittelsenkrechte und Winkelhalbierender

Konstruiere die Winkelhalbierenden eines Dreiecks und schneide diese mit dem Umkreis des Dreiecks! Betrachte die Schnittpunkte ungleich den Ecken bei verschiedenen Dreiecken und miss ihre Entfernungen von den Ecken! Was fällt Dir dabei auf? – Wir vermuten: Sei P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch den Eckpunkt C mit der Mittelsenkrechten der Seite AB. Dann liegt P auf dem Umkreis.



Zur Begründung dieser Vermutung rechnen wir die geometrische Konstruktion nach. Allerdings verlangen die dabei auftretenden algebraischen Umformungen und Substitutionen eine gewisse Übersicht, die durch ein CAS wirkungsvoll unterstützt werden kann. Wir werden zuerst die in Rede stehenden Geraden schneiden und dann erst beweisen, dass der Schnittpunkt auf dem Umkreis liegt.

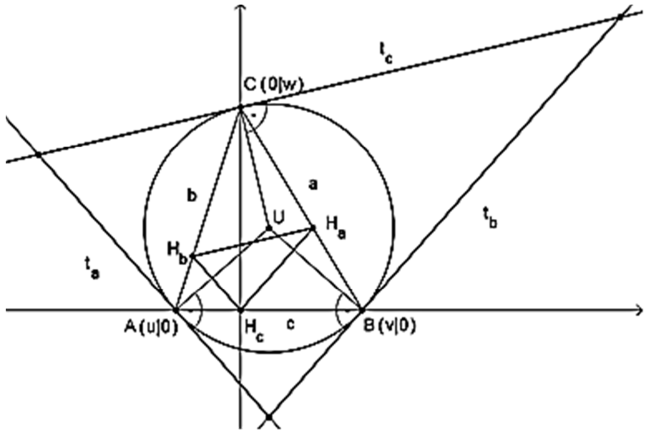
Die Einheitsvektoren in Richtung der Seiten AC und BC sind $\frac{1}{b}\begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{a}\begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$. Ihre Summe $\frac{1}{b}\begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix} + \frac{1}{a}\begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden durch den Eckpunkt C. Die Gleichung der Winkelhalbierenden w_γ ist daher $x\left(\frac{w}{b}+\frac{w}{a}\right)+(y-w)\left(\frac{u}{b}+\frac{v}{a}\right)=0$. Die Mittelsenkrechte s_{AB} der Seite AB hat die Gleichung $x=\frac{u+v}{2}$. Der Schnittpunkt P dieser beiden Geraden ist $\left(\frac{u+v}{2}\middle|w-\frac{u+v}{2}\cdot\frac{wa+wb}{ua+vb}\right)$.

Da P und der Umkreismittelpunkt U dieselbe x-Koordinate haben (sie liegen beide auf der Mittelsenkrechten s_{AB}, die parallel zur y-Achse verläuft), ist der Abstand von P zu U gleich $\frac{w}{2}+\frac{uv}{2w}-w+\frac{u+v}{2}\cdot\frac{wa+wb}{ua+vb}$. Um zu zeigen, dass das gleich dem Umkreisradius r ist, ist ein wenig Rechnerei (mit einem CAS) erforderlich.

Es gilt $\frac{uv}{2w}+\frac{u+v}{2}\cdot\frac{wa+wb}{ua+vb}=\frac{u^2va+uv^2b+uw^2a+uw^2b+vw^2a+vw^2b}{2w(ua+vb)}=\frac{vab^2+ua^2b+uw^2a+vw^2b}{2w(ua+vb)}=\frac{ab+w^2}{2w}$, wobei bei der zweiten Gleichung $b^2=u^2+w^2$ und $a^2=v^2+w^2$ verwendet worden ist. Der Abstand von P zu U ist somit $-\frac{w}{2}+\frac{ab+w^2}{2w}=\frac{ab}{2w}$, also gleich dem Umkreisradius r.

Höhenfußpunkt- und Tangentendreieck

Zeichne die drei Höhenfußpunkte eines beliebigen Dreiecks und verbinde sie! Das so erhaltene Dreieck heißt Höhenfußpunktdreieck. Das Dreieck selbst ist Tangentendreieck an seinen Inkreis. Konstruiere nun ein Tangentendreieck, dessen Seiten durch die Ecken des Dreiecks verlaufen! Welche Beziehung scheint zwischen dem Höhenfußpunkt- und diesem Tangentendreieck zu bestehen? – Wir vermuten: Die Seiten des Höhenfußpunktdreiecks liegen parallel zu den Seiten des Tangentendreiecks.



Dazu geben wir eine Projektionsformel an: Projiziert man den Punkt $(p|q)$ auf die Gerade g mit der Gleichung $y=kx+d$, dann erhält man $\left(\frac{kq+p-dk}{k^2+1} \middle| \frac{k^2q+kp+d}{k^2+1}\right)$. Mit dieser können wir die Koordinaten der Höhenfußpunkte angeben: $H_a\left(\frac{uv^2+vw^2}{v^2+w^2} \middle| \frac{v^2w-uvw}{v^2+w^2}\right)$, $H_b\left(\frac{u^2v+uw^2}{u^2+w^2} \middle| \frac{u^2w-uvw}{u^2+w^2}\right)$ und $H_c(0|0)$.

Der Vektor $\overrightarrow{UA}$ ist $-\frac{1}{2w}\begin{pmatrix} vw-uw \\ w^2+uv \end{pmatrix}$. Ein Richtungsvektor der Tangente t_a an den Umkreis im Eckpunkt A ist daher $\begin{pmatrix} w^2+uv \\ uw-vw \end{pmatrix}$. Aus den Koordinaten der Höhenfußpunkte folgt, dass der Vektor $\overrightarrow{H_cH_b}$ gleich $\frac{u}{u^2+w^2}\begin{pmatrix} uv+w^2 \\ uw-vw \end{pmatrix}$ ist. Man sieht, dass er parallel zur Tangente liegt.

Ein kurzes Resümee und ein Hinweis

Es ist deutlich erkennbar, wie mächtig die analytische Geometrie als Werkzeug zum Begründen sein kann. In PM, Heft 44, **54.** Jahrgang, 2012, S. 36–40, erscheint eine ausführliche Darstellung dieser Thematik (mit GeoGebra-Dateien und elementargeometrischen Beweisen im online-Anhang).

Literatur

bm:ukk (2004): Lehrplan für den Pflichtgegenstand Mathematik an der Oberstufe der AHS in Österreich. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/ 11859/lp_neu_ahs_07.pdf, 27.9.2011.

Holland, G. (1988): Geometrie in der Sekundarstufe. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Band 9. Mannheim/Wien/Zürich, BI Wissenschaftsverlag.